



UTILIZAÇÃO DE TÉCNICAS TEMPO-FREQUÊNCIA NO AUXÍLIO À INTERPRETAÇÃO DE SINAIS EM ENGENHARIA

Henrique F Bucher

Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE
Programa de Engenharia Civil

Carlos Magluta

Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE
Programa de Engenharia Civil

Resumo. *Na análise da resposta de estruturas são usualmente utilizados os domínios do tempo e da frequência. Em ambos os casos, somente parte da informação contida no sinal fica aparente. Neste trabalho apresenta-se uma ferramenta para a análise de sinais que permite observar simultaneamente as respostas nos dois domínios, isto é, uma Distribuição Tempo – Frequência (TFDs). Estes resultados são funções bidimensionais que mostram a distribuição da energia contida no sinal em função do tempo e da frequência simultaneamente. Neste trabalho é apresentada a teoria geral das TFDs, mostrando alguns tipos de distribuições existentes, suas propriedades e o custo computacional envolvido. Também é apresentado neste trabalho a metodologia para implementação computacional desta ferramenta, com ênfase para um algoritmo rápido desenvolvido para o cálculo de distribuições tempo-frequência da classe geral de Cohen (GTFD). Para ilustrar a aplicabilidade das TFDs e sua eficiência como ferramenta para a visualização do comportamento da resposta estrutural, são mostrados alguns sinais simples usualmente obtidos em ensaios experimentais.*

Palavras-chave: *Distribuições tempo-frequência, análise espectral, sinais.*

1. INTRODUÇÃO

A apreensão do significado de certos fenômenos físicos através da medição regular de suas grandezas características (sinais) foi significativamente melhorada a partir do final da década de 60 com a popularização do uso do computador no meio científico e, principalmente, com a descoberta da transformada rápida de Fourier – FFT. Na forma matemática da transformada de Fourier, a frequência é uma grandeza independente do tempo, constituindo um domínio à parte, o que dá sentido às expressões “domínio do tempo” e “domínio da frequência”.

No entanto, a percepção física, auditiva ou visual, informa que a frequência, ou melhor, o conteúdo espectral do sinal, é sempre dependente do tempo. Este é o caso de um instrumento musical sendo executado, por exemplo. Em certas aplicações, como em reconhecimento de voz (Potter, Kopp, Green, 1947, Kumaresan, Ramalingam, 1993) é

imprescindível saber quais as frequências existem no sinal a cada instante. Esta informação, que a transformada de Fourier não contém, pode ser obtida através das Distribuições Tempo-Frequência (TFDs), assunto deste trabalho.

2. DESENVOLVIMENTO DAS TFDs

O início da década de 40 viu uma abordagem simples obter êxito na construção de uma TFD. A idéia consiste em recortar o sinal $f(t)$ em fatias, multiplicando-o por uma função de enjanelamento $h(t)$ centrada no instante τ , de forma a se obter a fatia $s(\tau, t)$

$$s(\tau, t) = f(t)h(t - \tau) \quad (1)$$

A transformada de Fourier $S(\tau, \omega)$ deste sinal recortado é uma distribuição tempo-frequência (TFD) denominada *espectrograma*. De todas as TFDs até hoje desenvolvidas, esta é a mais estável numericamente e a de implementação mais simples. Contudo, é uma distribuição grosseira, isto é, não consegue distinguir sinais cujas frequências sejam bastante próximas.

Uma abordagem alternativa ainda desenvolvida na década de 40 foi introduzida por Ville (1948) que define a transformada de Wigner-Ville $WV(\tau, \omega)$ como a transformada de Fourier da função de autocorrelação do sinal. Esta distribuição é bastante mais precisa que o espectrograma na distinção de frequências próximas mas sofre com a ocorrência de *termos cruzados*, também chamados de *interferências*.

No sentido de minimizar a ocorrência de termos cruzados, uma série de outras distribuições similares à de Wigner-Ville foram criadas durante as décadas de 50 e 60 (Page, 1952, Margenou, Hill, 1966, Rihaczek, 1968). Finalmente Cohen (1966) prova que *todas* as distribuições tempo-frequência $C_f(t, \omega)$ pertencem a uma única classe – denominada Classe Geral de Cohen – e podem ser expressadas na forma geral

$$C_f(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_f(t, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2)$$

com

$$R_f(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u + \tau/2) f^*(u - \tau/2) \Phi(t - u, \tau) du \quad (3)$$

onde $f(t)$ é o sinal sendo analisado, $f^*(t)$ seu conjugado complexo e $R_f(t, \tau)$ é um tipo de função de autocorrelação do sinal - modificada pela inserção da função-janela $\Phi(t, \tau)$. A transformada de Fourier da função-janela $\Phi(t, \tau)$ é denominada núcleo da distribuição e notada como $\phi(\theta, \tau)$. O tipo de núcleo (ou janela) escolhido determina o tipo e propriedades da distribuição resultante.

3. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A implementação computacional da classe geral de Cohen infelizmente não é tão trivial como outras distribuições como, por exemplo, o espectrograma e a distribuição de Wigner-

Ville. Estas dificuldades estão relacionadas à discretização das Eqs. (2) e (3) e são discutidas em detalhe por Jeong, Williams (1992), trabalho do qual se origina a distribuição *alias-free* ou GDTFD-AF como preferem seus autores.

De forma a simplificar a técnica apresentada por Jeong e Williams ao mesmo tempo otimizando-a, introduz-se a Simplified Alias Free Time Frequency Distribution (SAF-TFD), descrita a seguir. Para que a discretização das Eqs. (2) e (3) seja realizada é necessário inicialmente modificar a expressão da autocorrelação, Eq. (3), de tal forma que se pareça com uma convolução do tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)G(t-s)ds \quad (4)$$

Para isto faz-se a substituição

$$s = u - \tau/2 \quad (5)$$

onde deve-se ter em mente que a variável τ comporta-se como uma constante dentro da integração da Eq. (3). Desta forma as seguintes expressões se seguem

$$\begin{aligned} u &= s + \tau/2 \rightarrow du = ds \\ u + \tau/2 &= s + \tau \\ t - u &= t - s - \tau/2 \end{aligned} \quad (6)$$

Substituindo as Eqs. (6) na expressão da função de autocorrelação, Eq. (3), segue-se que

$$R_f(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s + \tau)f^*(s)\Phi(t - s - \tau/2, \tau)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} F_\tau(s)G_\tau(t - s)ds \quad (7)$$

onde

$$\begin{aligned} F_\tau(s) &= f(s + \tau)f^*(s) \\ G_\tau(s) &= \Phi(s - \tau/2, \tau) \end{aligned} \quad (8)$$

A discretização da convolução, Eq. (7), é feita introduzindo-se as variáveis inteiras m , n e k de tal forma que

$$s = m\Delta t, \quad t = n\Delta t, \quad \tau = k\Delta t \quad (9)$$

A integral da Eq. (7), discretizada, toma a forma

$$R_f[n, k] = \sum_m F_k[m]G_k[n - m] \quad (10)$$

e as Eqs. (8) tornam-se

$$F_k[m] = f[m+k]f^*[m] \quad (11)$$

$$G_k[m] = \Phi(m - k/2, k)$$

A convolução da Eq. (10) pode ser otimizada pela utilização da *Fast Fourier Transform* (FFT), de tal forma que

$$R_f[_,k] = IFFT[FFT(F_k) \cdot FFT(G_k)] \quad (12)$$

O cálculo da convolução através da FFT gera um algoritmo muitas vezes mais rápido que o simples cálculo direto. No entanto a convolução calculada usando-se a FFT é uma *convolução periódica*, isto é, valores do fim do sinal passam a influenciar o início da distribuição e vice-versa. A Figura 1 mostra o fluxograma de cálculo para da SAF-TFD. Foi utilizada a convenção da linguagem FORTRAN para vetores/matrizes, isto é, o primeiro elemento é o de índice 1.

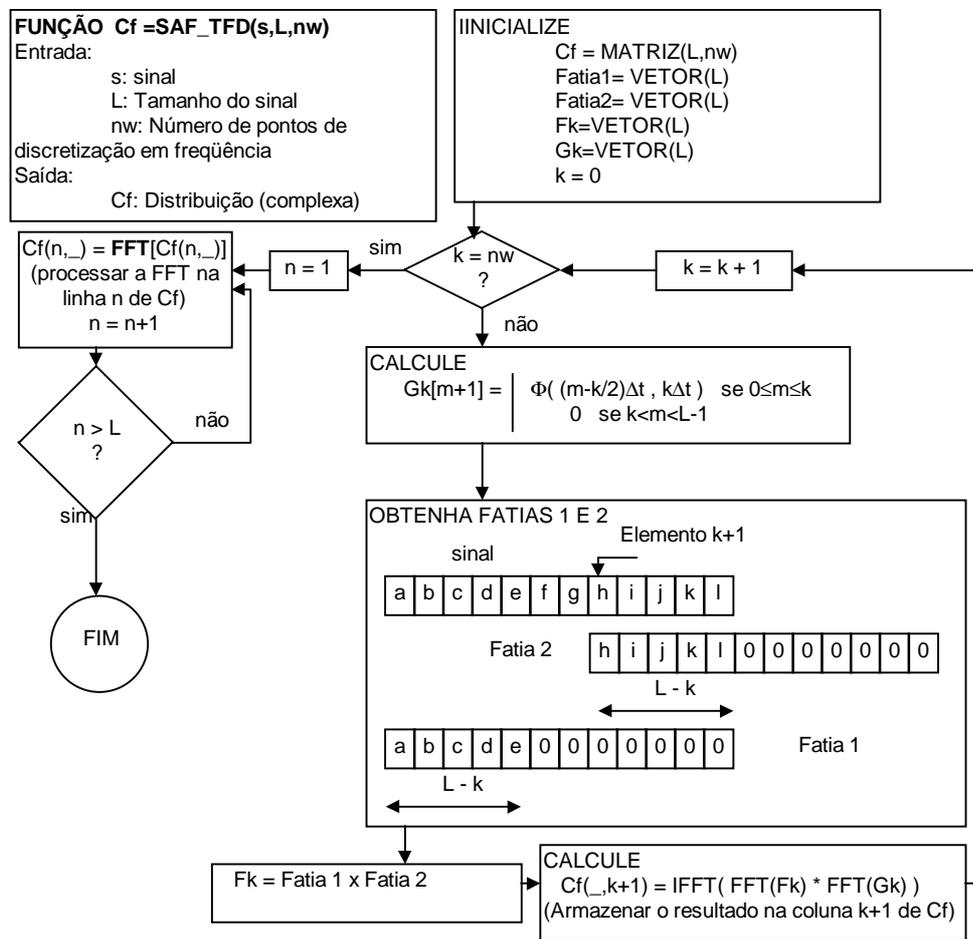


Figura 1 Fluxograma de cálculo da SAF-TFD

A SAF-TFD, conforme pode-se verificar no fluxograma, é um algoritmo genérico para cálculo de qualquer distribuição tempo-frequência. A distribuição em particular a ser usada é selecionada através do núcleo $\phi(\theta, \tau)$ a ser usado. Cohen (1995) faz uma boa avaliação dos núcleos mais populares, listados aqui na Tabela 1. Pode-se utilizar diretamente o núcleo $\phi(\theta, \tau)$ para o cálculo da SAF ao invés de calcular $FFT(G_k)$.

Nos exemplos apresentados neste trabalho foi utilizada a distribuição de Choi-Williams (1989).

Tabela 1 Diferentes núcleos e trabalhos onde se originaram

Distribuição	Núcleo: $\phi(\theta, \tau) = FT(\Phi(t, \tau))$
WIGNER (1932)	1
MARGENOU-HILL (1961)	$\cos\left(\frac{1}{2}\theta\tau\right)$
RIHACZEK (1968)	$e^{i\frac{\theta\tau}{2}}$
COHEN (1966)	$\frac{\text{sen}\frac{1}{2}\theta\tau}{\frac{1}{2}\theta\tau}$
PAGE (1952)	$e^{i\theta \tau }$
CHOI-WILLIAMS (1989)	$\frac{(\theta\tau)^2}{e^{\frac{\theta\tau}{2}}}$
Espectrograma	$\int_{-\infty}^{+\infty} h^*\left(u - \frac{1}{2}\tau\right)h\left(u + \frac{1}{2}\tau\right)e^{-i\theta u} du$
ZHAO-ATLAS-MARKS (1990)	$g(\tau) \tau \frac{\text{sena}\theta\tau}{a\theta\tau}$

4. PERFORMANCE COMPUTACIONAL

Muitas vezes a utilização de uma determinada técnica tempo-freqüência pode ser inviabilizada pelo seu longo tempo de execução. De fato, algumas implementações, como a alias-free, são inviáveis em determinados tipos de aplicações, quando geralmente se usa o espectrograma por ser mais rápido. Este item, portanto, objetiva apresentar uma análise do desempenho de algumas rotinas implementadas. São usados como quantificadores o tempo de execução e o número de operações matemáticas - flops (*FLOating Point operations*), uma unidade já consagrada no contexto de *benchmarking* de computadores.

Foram analisadas quatro distribuições: o espectrograma, a distribuição de Wigner-Ville, a distribuição alias-free de Jeong e Williams e a SAF-TFD do autor deste trabalho.

A Tabela 2 apresenta os resultados para o processamento de quatro sinais, com 64, 128, 256 e 512 pontos, respectivamente. Para cada sinal são medidos a quantidade de flops e o tempo total de execução. Adicionalmente inclui-se como comparação a quantidade de operações matemáticas exigidas pela FFT de um sinal de mesmo tamanho.

Dentre as distribuições analisadas, o espectrograma exigiu sempre menos recursos computacionais. A distribuição de Wigner-Ville, por sua vez, necessita de aproximadamente duas vezes mais operações matemáticas que o espectrograma e oito vezes mais tempo de execução. A versão SAF e a alias-free são as mais caras, porém as de melhor qualidade.

Sendo o tempo total a soma dos tempos gastos com as operações matemáticas mais outras operações como gerenciamento de memória, loops internos, chamadas de subrotinas, o tempo de execução não é proporcional à quantidade de operações matemáticas (flops) executadas. Por isso, espera-se que, para o mesmo número de operações matemáticas (flops), as implementações mais simples executem mais rapidamente que as mais complexas. Isto é o que se observa nos resultados para o sinal de 512 pontos: a versão SAF é executada em

apenas 3% do tempo requerido pela alias-free mesmo necessitando de 12% do número de operações matemáticas desta distribuição. Para sinais de maior tamanho esta velocidade tende a ser relativamente maior.

Tabela 2 Esforço computacional exigido por cada técnica

<i>Sinal (pontos)</i>	<i>FFT</i>	<i>Espectrograma</i>	<i>Wigner-Ville</i>	<i>SAF</i>	<i>Alias-Free</i>
64	1,4 kflops *	93 kflops 0,88 s	226 kflops 6,43 s	570 kflops 3,12 s	873 kflops 14,61 s
128	3,0 kflops *	404 kflops 1,54 s	975 kflops 12,19 s	2,5 Mflops 5,99 s	6,4 Mflops 49,52 s
256	6,6 kflops *	1,8 Mflops 3,08 s	4,2 Mflops 24,88 s	10,9 Mflops 13,47 s	48,7 Mflops 209,26 s
512	14,3 kflops *	7,6 Mflops 8,02 s	18,2Mflops 58,17 s	47,5 Mflops 25,60 s	380 Mflops 1098,77 s

5. EXEMPLOS

A Figura 2 mostra um sinal composto por três harmônicos superpostos (somados), de amplitude unitária e duração de 0.5s cada. Como a transformada de Fourier mostra, suas frequências são 60, 120 e 180Hz.

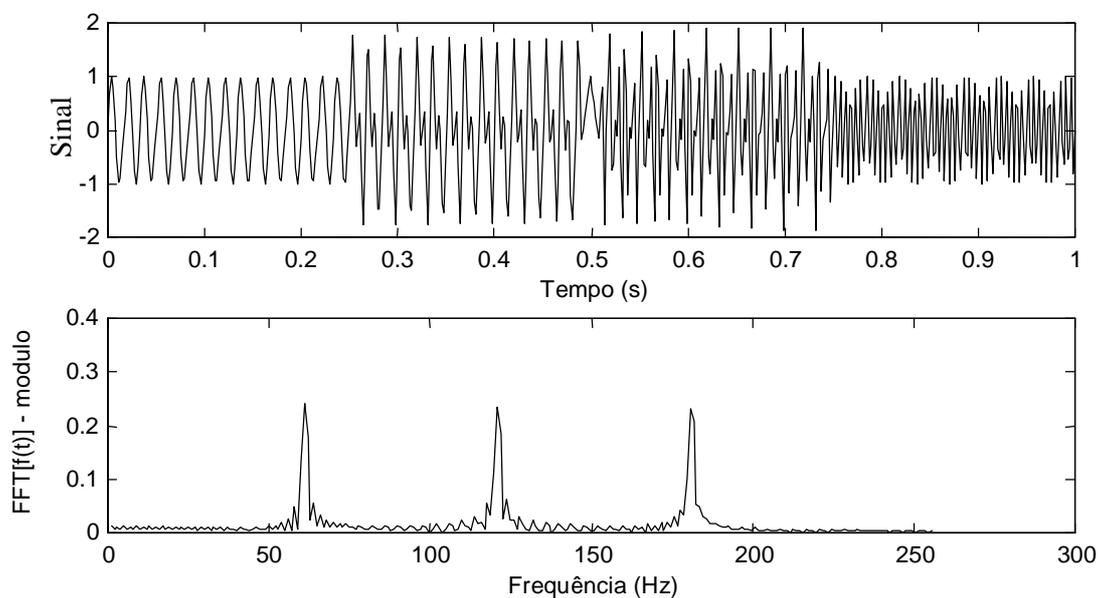


Figura 2 Sinal composto por três harmônicos e respectiva FFT

A partir deste sinal, calcula-se a sua respectiva distribuição tempo-frequência (TFD) utilizando a técnica SAF-TFD. A TFD é, como se vê na Figura 3, uma distribuição bidimensional onde os três eixos são: tempo, frequência e energia. Isto permite que o sinal possa ser visualmente separado em seus componentes fundamentais, facilitando uma análise visual.

Observa-se o primeiro componente, de frequência 60Hz iniciando no instante 0s. A rampa existente até o nivelamento no valor 0.5 é intrínseco ao cálculo de qualquer TFDs. O preço que se paga pela visualização tridimensional é uma certa perda de precisão tanto no tempo quanto em frequência. Isto é, as TFDs terão sempre menor precisão no tempo que o próprio sinal no tempo e menor precisão em frequência que a transformada de Fourier. A perda de precisão em frequência não pode ser bem avaliada na figura 3 pelo ângulo em que a figura está posicionada. Esta certa imprecisão em ambos os domínios é fundamentada numa inequação matemática denominada “princípio da indeterminação” (Cohen, 1995). Este princípio é resumido pela inequação

$$T \cdot B \geq \frac{1}{2} \quad (12)$$

onde T é a precisão no tempo, em segundos, e B é a precisão em frequência – largura de banda – em Hertz. Esta inequação afirma que nenhum sinal, transformado ou distribuição tempo-frequência poderão ter precisão arbitrária nos dois domínios, isto é, tendo sido fixada uma precisão em um domínio, o outro ficará automaticamente limitado a um certo valor.

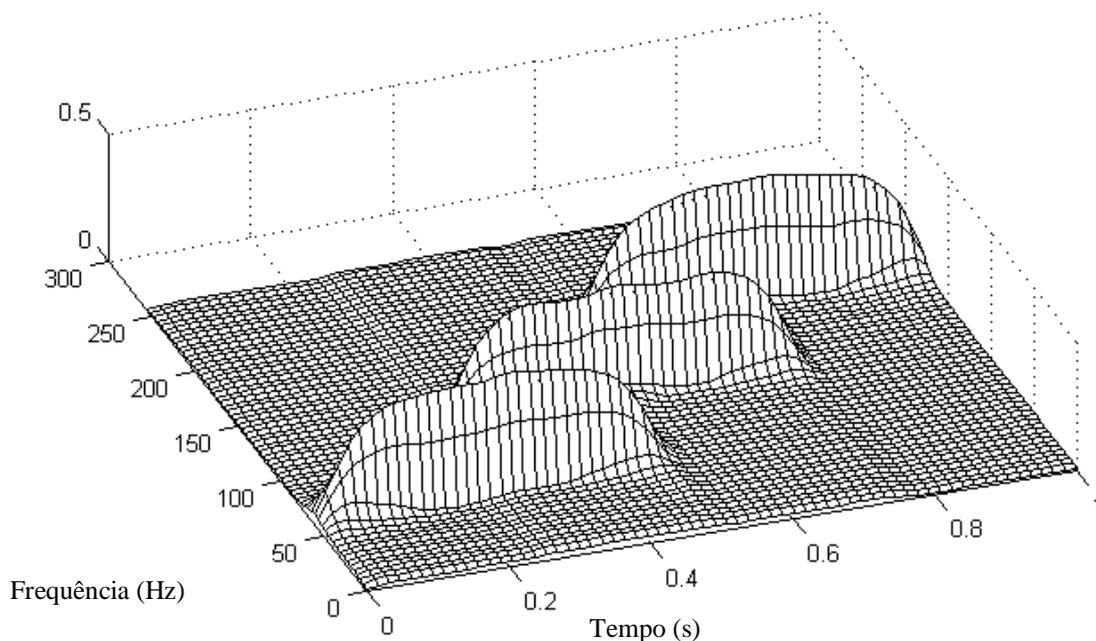


Figura 3 Distribuição tempo-frequência do sinal três harmônicos (fig.1)

O segundo exemplo (Figura 4) é um chirp linear, um sinal de amplitude unitária cuja frequência varia linearmente de zero no instante 0s até o máximo de 250Hz no instante final (1s). É um sinal muito utilizado na calibração de transdutores. A transformada de Fourier, também na figura 4, mostra um valor aproximadamente constante para a faixa de frequências de interesse: 0-256Hz.

A distribuição tempo-frequência para o chirp linear calculada utilizando-se a SAF-TFD é mostrada na Figura 5. Nesta figura evidencia-se em maior grau a relativa imprecisão das TFDs em ambos os domínios, demonstrada através da suavidade da superfície. Entretanto esta suavidade não deve ser toda creditada a distribuição em si, porém deve ser levado em conta que o próprio processo de digitalização e processamento numérico/gráfico inserem incertezas no cálculo, o que fica evidenciado na transformada de Fourier da figura 4.

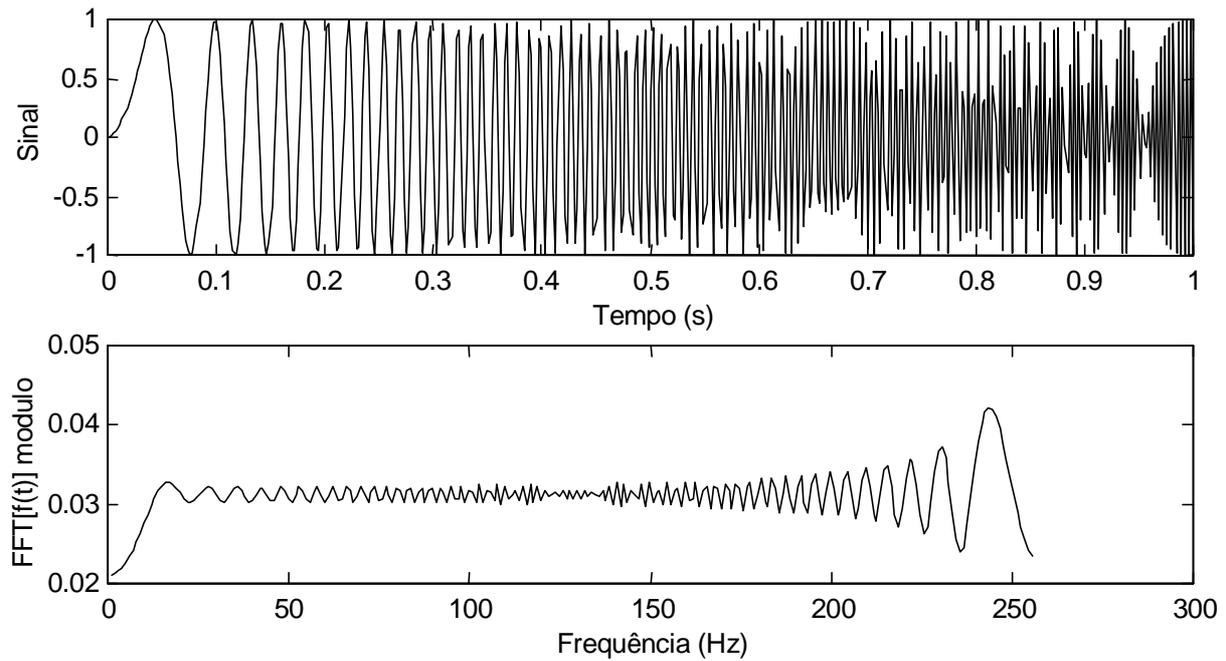


Figura 4 Segundo exemplo – chirp linear e respectiva transformada de Fourier

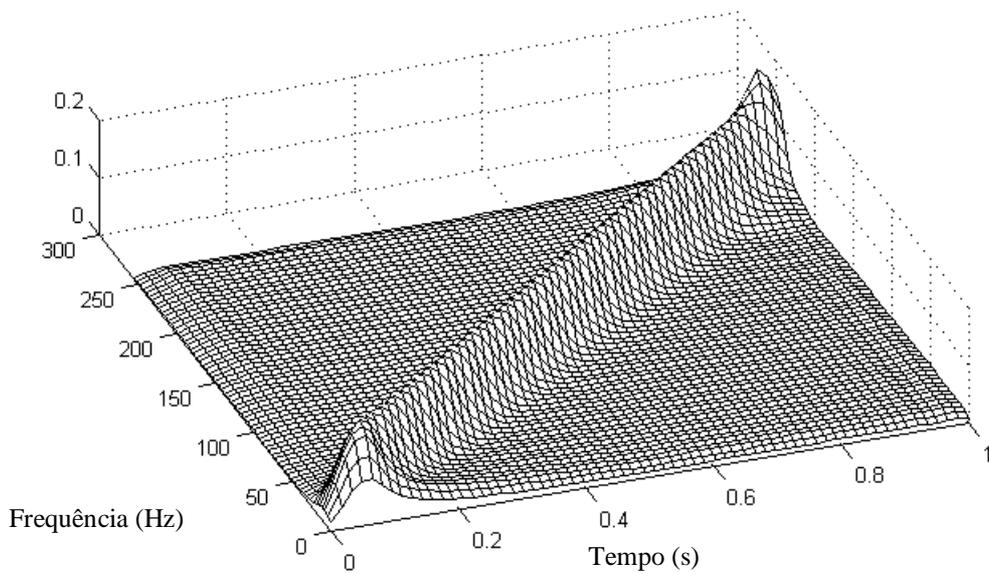


Figura 5 Distribuição tempo-frequência do sinal chirp (fig.4)

Embora este abaulamento das figuras geradas pela SAF-TFD seja intrínseco à própria teoria, não ao método em particular, devido ao princípio da indeterminação, a SAF-TFD aproxima-se bastante do limite imposto (1/2) indicado na Eq.13. O espectrograma, por exemplo, apesar de mais simples, rápido e robusto, possui uma incerteza duas vezes superior. Isto terá como consequência uma figura muito mais abaulada (imprecisa) que a mostrada na figura 5. Para pré-visualização, portanto, o espectrograma é uma excelente alternativa.

O terceiro exemplo, mostrado na Figura 6, é um sinal típico de um impacto com duração média de 0.02s. Este sinal foi modelado com uma forma triangular, que se aproxima bastante da forma apresentada por sinais lidos nas proximidades das superfícies de contato entre dois corpos durante o impacto.

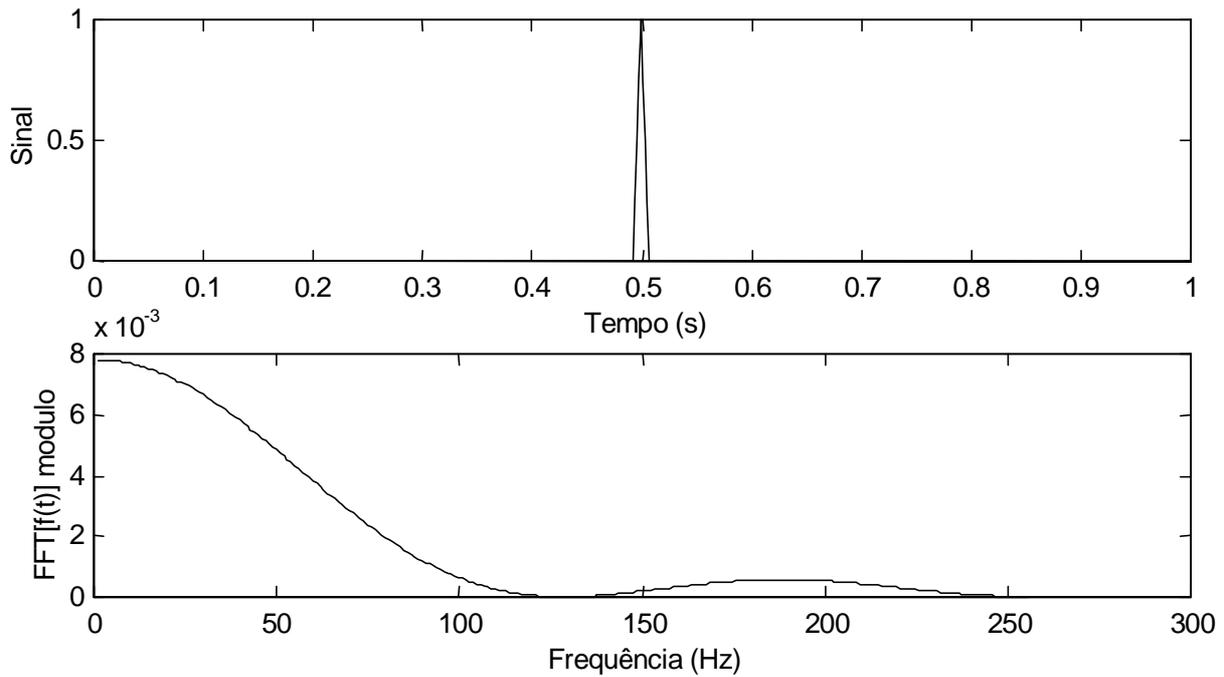


Figura 6 Terceiro exemplo – sinal impactado e respectiva transformada de Fourier

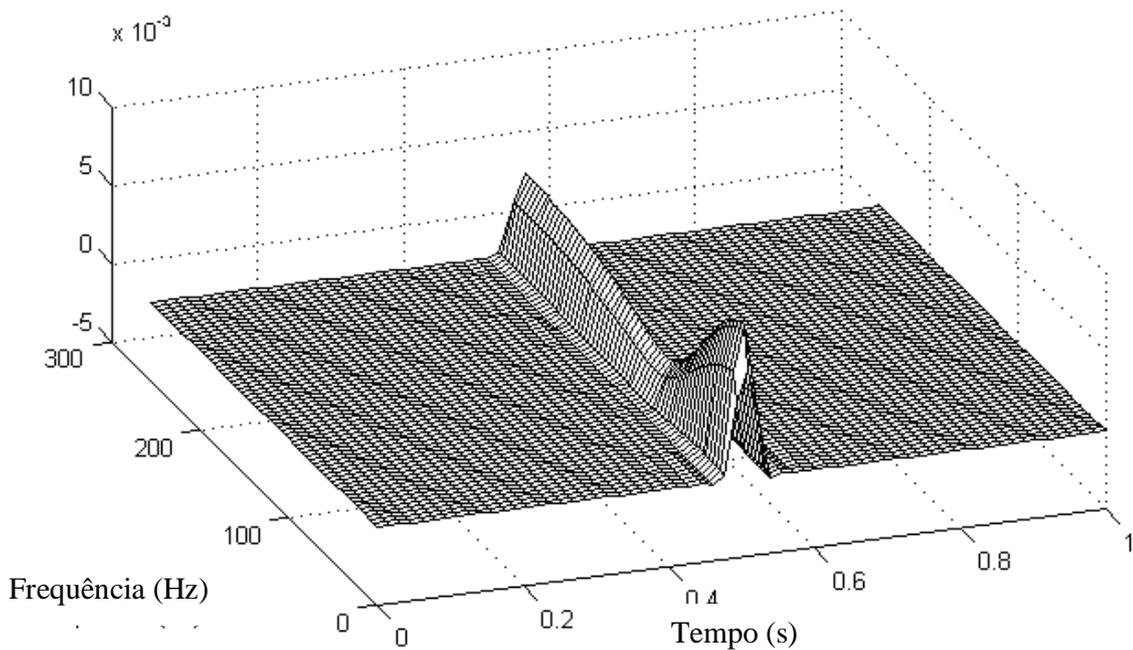


Figura 7 Distribuição tempo-frequência calculada para o sinal impactado (figura 5)

A transformada de Fourier deste sinal tende a apresentar um patamar constante para baixas frequências, tanto maior quanto menor for o tempo de contato. Logo após este patamar, o módulo da transformada de Fourier se aproxima do zero e volta novamente a aumentar e retornar ao zero, em ciclos.

Na distribuição tempo-frequência deste sinal, mostrada na Figura 7, pode-se notar a grande concentração de energia no instante 0.5s. Em frequência, pode-se notar que a TFD

segue a transformada de Fourier, isto é, um pequeno patamar em baixa frequência seguido de um desnível até o zero e em seguida uma elevação.

Pode ser ressaltada também na figura 7 um outro aspecto das TFDs, o suporte finito no tempo. Este requerimento dita que a TFD não deve assumir valores quaisquer – além do zero – nos instantes em que o sinal também é nulo. Por analogia, a figura 3 demonstra o requerimento de suporte finito em frequência, isto é, a TFD não deve assumir valores não-nulos para frequências que não ocorrem no sinal.

6. CONCLUSÕES

Distribuições tempo-frequência são ferramentas úteis para auxiliar no entendimento de sinais complexos porque proporcionam uma forma singular de visualização. Como preço a pagar pela visualização tridimensional, apresentam menor precisão em ambos os domínios quando comparados com o sinal no tempo e a transformada de Fourier.

Entre as distribuições tempo-frequência que apresenta melhor relação custo-benefício está a SAF-TFD, apresentada detalhadamente neste trabalho porque apresenta qualidade bastante superior comparativamente ao espectrograma, resolve o problema de aliasing intrínseco ao cálculo das TFDs, é mais simples que as apresentadas em trabalhos anteriores e, por fim, apresenta maior velocidade que outras distribuições por utilizar a Fast Fourier Transform para agilizar o processamento. Não obstante, a SAF é uma TFD genérica, isto é, pode ser utilizada para gerar qualquer distribuição tempo-frequência, bastando apenas que se altere a função correspondente ao núcleo da distribuição.

REFERÊNCIAS

- Choi, H. I., Williams, W. J., “Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels”, *IEEE Trans. On Acoust., Speech, Signal Processing*, v. 37, pp. 862-871, 1989.
- Cohen, L., “Generalized phase-space distribution functions”, *Jour. Math. Phys.*, v. 7, pp. 781-786, 1966.
- Cooley, J. W., Tukey, J. W., “An Algorithm for the Machine Computation of Complex Fourier Series,” *Mathematics of Computation*, v. 19, pp. 297-301, Apr. 1965.
- Cohen, L., “A general Approach for Obtaining Joint Representations in Signal Analysis - Part I: Characteristic Function Operator Method”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, v. 44, n. 5, 1996.
- Cohen, L., *Time-frequency Analysis*”, 1 ed., New Jersey, Prentice Hall, 1995.
- Kumaresan, R., Ramalingam, C.S., “On separating Voiced-Speech into its Components” in: *Proc. of Twenty-Seventh Annual Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, v. 2, 1041-1046, 1993.
- Margenou, H., Hill, R. N., “Correlation between measurements in quantum theory”, *Prog. Theoret. Phys.*, v. 26, pp. 722-738, 1961.
- Page, C. H., “Instantaneous power spectra”, *Jour. Appl. Phys.*, v. 23, pp. 103-106, 1952.
- Potter, R. K., Kopp, G., Gree, H.C., *Visible Speech*, Van Nostrand, 1947.
- Rihaczek, K. S., “Signal energy distribution in time and frequency”, *IEEE Trans. Info Theory*, v. 14, pp. 368-374, 1968.
- Ville, J., “Theorie et applications de la notion de signal analytique,” *Cables and Transmissions*, v.2A, pp. 61-74, 1948.
- Wigner, E. P., "On the quantum correction for thermodynamic equilibrium", *Phys. Ver.*, v. 40, pp. 749-759, 1932.
- Zhao, Y., Atlas, L. E., Marks, R. J., “The use of cone-shaped kernels for generalizes time-frequency representations of nonstationary signals”, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, v. 38, pp. 1084-1091, 1990.

USE OF TIME-FREQUENCY TECHNIQUES IN INTERPRETATION OF SIGNALS IN ENGINEERING

Henrique F Bucher

Federal University of Rio de Janeiro, COPPE
Programa de Engenharia Civil

Carlos Magluta

Federal University of Rio de Janeiro, COPPE
Programa de Engenharia Civil

***Abstract.** In analysis of structural response usually are used time or frequency domain techniques. In both cases, only a part of all information contained in the signal is apparent. It is presented an analysis tool that allows the visualization of responses in both domains simultaneously, i.e., a Time-Frequency Distribution (TFD) of energy. This results are bidimensional functions that show the energy distribution contained by the signal as a function of time and frequency. This work presents the general theory of TFDs, showing some types of existing distributions, their properties and the computational effort involved. So presented is the methodology for computational implementation of this tool, with emphasis on a fast algorithm developed to calculate the Cohen's class of time-frequency distributions. In order to show the applicability of this tool and its efficiency, some simple signals commonly appearing in experimental research are analysed.*

***Keywords:** Time-Frequency distributions, spectral analysis, signals.*